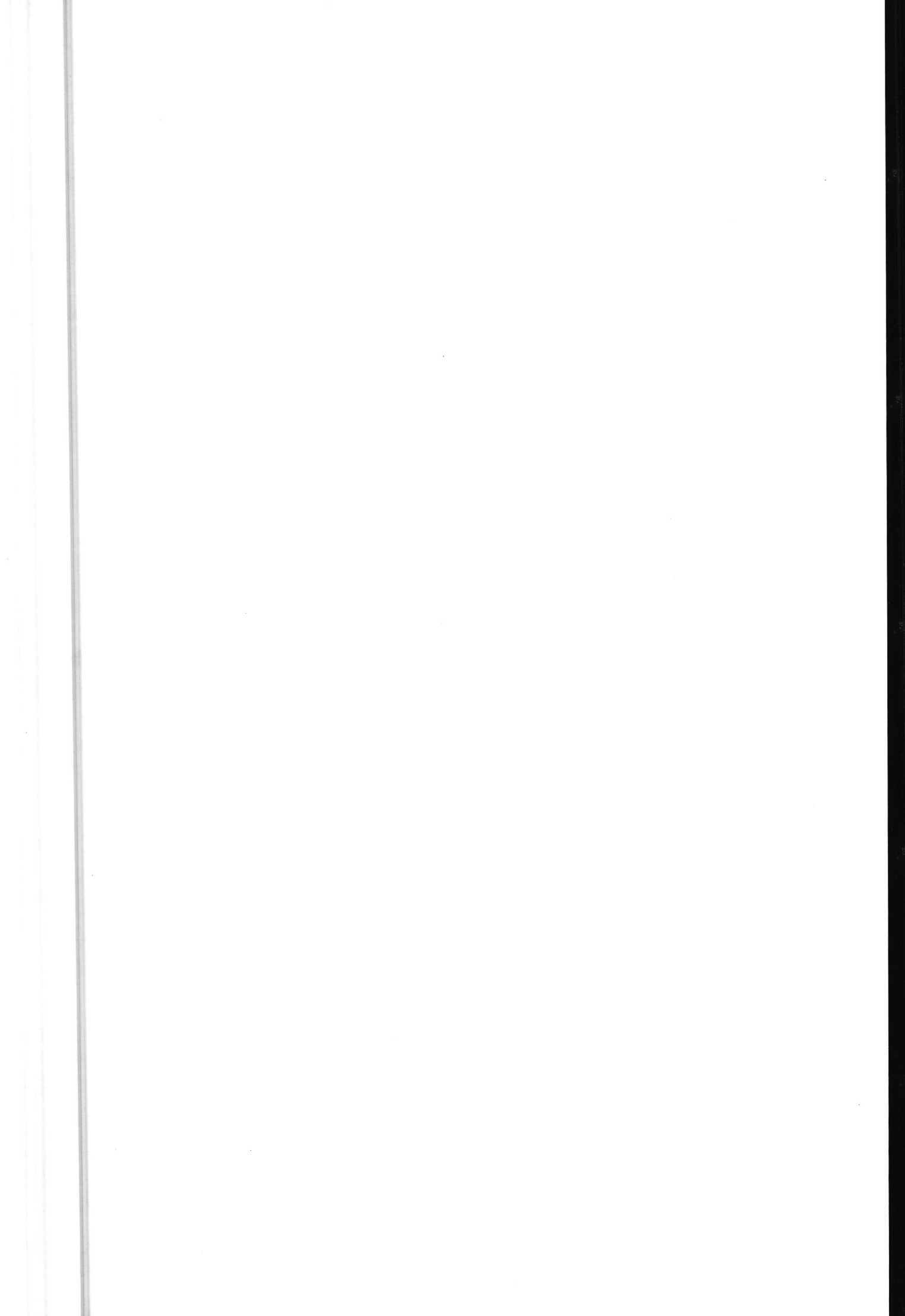


MINISTERIO DE INDUSTRIA Y ENERGIA  
COMISARIA DE LA ENERGIA Y RECURSOS MINERALES

**APLICACION DE LA GEOESTADISTICA  
A LA INVESTIGACION MINERA**

INSTITUTO GEOLOGICO Y MINERO DE ESPAÑA



APLICACION DE LA GEOESTADISTICA  
A LA INVESTIGACION MINERA

## INDICE

	Pág.
1. INTRODUCCION	1
1.1. LA GEOESTADISTICA COMO HERRAMIENTA APLICABLE A LA INVESTIGACION MINERA	2
2. CONCEPTOS ESTADISTICOS BASICOS	3
2.1. VARIABLES Y DISTRIBUCIONES	33
2.2. MEDIDAS DE CENTRALIZACION Y DISPERSION	4
2.3. LA PROBABILIDAD COMO FRECUENCIA	7
2.4. LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION	8
2.5. EL MUESTREO	9
2.6. CORRELACIONES	9
2.7. RESUMEN	11
3. LA GEOESTADISTICA COMO CIENCIA	12
3.1. ORIGENES	12
3.2. NOCION DE VARIABLE REGIONALIZADA Y ALEATORIA	14
3.3. PRINCIPIO DE ESTACIONARIDAD	15
3.4. EL VARIOGRAMA	16
3.5. LA VARIANZA EN GEOESTADISTICA	17
4. LA GEOESTADISTICA EN LA INVESTIGACION MINERA	19
4.1. APLICACION DE LA GEOESTADISTICA EN INVESTIGACION MINERA	19
4.1.1. Etapas de una investigación minera	20
5. UTILIZACION DE LA GEOESTADISTICA	23
5.1. VARIANZA DE LA LEY DE BLOQUES	23
5.2. CALCULO DE VARIANZAS	25
5.2.1. Principio de composición de varianzas	25
5.3. MEDIAS MOVILES	26
5.3.1. Ponderación inversa o cuadrática inversa a la distancia	26



	Pág.
5.3.2. Ponderación mediante técnicas de regresión	27
5.3.3. Krigeage	27
6. CONCLUSIONES	29

## 1. INTRODUCCIÓN

El progresivo agotamiento de los recursos conocidos, así como el aumento de los precios de los productos minerales, ha hecho que hoy se exploten criaderos de leyes muy bajas que antaño era impensable su explotación.

Pero la cruz de la moneda se halla en el hecho de que al explotar menas de muy baja ley, es preciso un control muy estricto de la misma, que nos delimite exactamente la zona explotable de la que debe considerarse de ley marginal.

Este planteamiento nos lleva al abandono de técnicas más o menos especulativas como medio resolutivo y a buscar una técnica más apropiada para el tratamiento de la información obtenida y para la elección de los datos mínimos necesarios en los que basar la adopción de una decisión que aminore el riesgo inherente a este tipo de negocio.

## 1.1. LA GEOESTADISTICA COMO HERRAMIENTA APLICABLE A LA INVESTIGACION MINERA

Los problemas de evaluación de yacimientos, determinación de leyes, potencias, etc, se reducen al fin a un problema de síntesis de datos, es decir, a hallar unos cuantos parámetros (datos, funciones, etc) que sean capaces de definirnos un todo.

Estos problemas de síntesis de datos están plenamente resueltos por medio de la Estadística, luego en principio - un tratamiento estadístico de los datos sería suficiente para solventar el problema. Ocurre sin embargo que en los fenómenos geoestadísticos intervienen otra serie de parámetros extraestadísticos, como es el hecho de algunos fenómenos se den de un modo aleatorio o los problemas de borde donde hay variaciones bruscas del valor de un parámetro, con lo cual es preciso ampliar el campo de actuación de la Estadística pura.

Así pues, con todos estos elementos estamos construyendo una nueva herramienta que sí que será plenamente eficaz para resolver los problemas que tenemos planteados. La Geoestadística constituye la herramienta de trabajo cuyo uso se hace tanto más necesario cuanto mayor es el número de datos correlacionables a utilizar, estableciendo niveles de fiabilidad imprescindibles para la adopción de nuevas decisiones, garantizando hasta dónde se puede la óptima utilización de técnicas y recursos. La Geoestadística es la rama de la teoría moderna de probabilidades aplicada a la búsqueda de recursos no renovables, es decir, en todas las etapas de un proyecto de investigación minera, desde el reconocimiento geológico - hasta el establecimiento de un programa de explotación, pasando por la evaluación del potencial minero de una determinada zona.

## 2. CONCEPTOS ESTADÍSTICOS BÁSICOS

Aunque sale fuera del objetivo del presente trabajo, que no es otro que mostrar las posibilidades de la Geoestadística aplicada a la investigación minera, se va a recordar en el presente capítulo los principales conceptos estadísticos que se utilizarán fundamentalmente, con el fin de unificar nomenclatura y fijar conceptos.

### 2.1. VARIABLES Y DISTRIBUCIONES

En una colección de datos que atañen a las características de un grupo de objetos, es a menudo imposible o poco práctico observar la totalidad de los individuos sobre todo si estos son muchos. En lugar de examinar al grupo entero denominado POBLACION o UNIVERSO, se examina una pequeña parte del mismo denominada MUESTRA.

Si una muestra es representativa de una población se pueden deducir importantes conclusiones de esta a partir del análisis de aquella. La parte de la Estadística, que trata de las condiciones bajo las cuales estas inferencias son validas se llama Estadística Inductiva. Ahora bien, al no poder estar absolutamente ciertos de la veracidad de tales inferencias se ha de utilizar con frecuencia en estas conclusiones el término de PROBABILIDAD.

La parte de la Estadística que trata solamente de describir y analizar un grupo dado sin sacar conclusiones e inferencias de un grupo mayor se llama Estadística Descriptiva.

Una VARIABLE es un parámetro que puede tomar cualquier valor de un conjunto determinado de ellos denominado DOMINIO de la variable.

Cuando una variable toma gran cantidad de valores es útil distribuir esos valores en CLASES. Se ha logrado así sintetizar la información de datos en un conjunto de información constituido por el campo que abarca cada clase que denominaremos RANGO y el número de veces que la variable queda incluida en cada clase que denominaremos FRECUENCIA.

El grado de sintetización obtenida ha sido tal, que ya incluso se puede representar gráficamente mediante un HISTOGRAMA que no es más que la representación funcional de las frecuencias en función de los marcos de clase.

Si disminuimos el rango de las clases, el histograma nos terminará resultando una curva que nos expresará la frecuencia de cada valor. A esta curva se le denomina CURVA DE DISTRIBUCION.

## 2.2. MEDIDAS DE CENTRALIZACION Y DISPERSION

Se denomina PROMEDIO a cualquier valor típico y representativo de una distribución, Como los promedios tienden a situarse hacia la mitad del dominio de la variable, a los pro

medios se les conoce con el nombre de medidas de centralización.

De estas medidas las más corrientes son:

- La media aritmética.- Sean los  $N$  valores que toma la variable  $X$  los representados por  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Se define como media aritmética  $\bar{X}$  de la distribución a la relación:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{N}$$

- La media aritmética ponderada.- Cuando a todos los valores de la variable no se les concede la misma importancia sino que se les asigna pesos  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$  se define la media aritmética ponderada como:

$$\bar{X}_p = \frac{P_1 X_1 + P_2 X_2 + \dots + P_i X_i + \dots + P_n X_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_i + \dots + P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i X_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

- La mediana.- Si se ordenan los valores de la variable de menor a mayor se define la mediana como el valor que toma el elemento situado en el punto medio de la ordenación.

- La moda.- Es el valor que se presenta con mayor frecuencia.

- La media geométrica.- Sean los mismos valores de la distribución que los expresados en el caso de la media aritmética. Se define entonces la media geométrica  $G$  como:

$$G = (X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_i \cdot \dots \cdot X_n)^{1/N} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^n X_i}$$

- La media armónica.- Es la inversa de la media aritmética de los inversos de los valores. Es decir, usando la misma nota--



ción que la empleada hasta ahora sería:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

- Cuartiles, deciles, percentiles.- Si una serie de valores se colocan en orden de magnitud, el valor medio que divide a la distribución en dos partes iguales es la mediana. Por extensión de esta idea se puede pensar en aquellos valores que dividen al dominio en cuatro partes iguales. Estos valores representados por  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  se llaman primero, segundo y tercer cuartil respectivamente.

Analogamente los valores que dividen los datos en diez partes iguales se llaman deciles, mientras que los valores que dividen los datos en cien partes iguales se llaman percentiles. Evidentemente  $P_{25}$  y  $P_{75}$  se corresponden con el primer y tercer cuartil respectivamente.

Es problema de las medidas de centralización, es por sí solas no nos dan idea de como es la otra medida que nos da idea de como se distribuyen los valores de la variable alrededor de un valor medio. A estas medidas de las denominadas medidas de dispersión. Las más importantes son:

- El rango.- Es la diferencia entre el valor menor y el mayor.

- Desviación media.- Es la media de la desviación de los datos respecto a la media aritmética consideradas en valor absoluto.

El hecho de considerarlo en valor absoluto es porque si se tomase con su signo cada desviación resultaría siempre cero.

La expresión matemática sería:

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}_1|}{N}$$

- Desviación típica.- Es la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones. Matemáticamente se expresa:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_1)^2}{N}}$$

Al cuadrado de la desviación típica se le denomina varianza y tendrá gran importancia en todo los estudios geoestadísticos.

Cuando se trate de varianza de una población se representa por  $S^2$  y se denomina varianza poblacional, en tanto que si es la varianza de una muestra se representa por  $\sigma^2$  y se denomina varianza muestral.

### 2.3. LA PROBABILIDAD COMO FRECUENCIA

Supuesto un suceso E, que de un total de n casos posibles, todos igualmente factibles puede presentarse en h de los casos. La probabilidad de que ocurra el suceso llamada ocurrencia viene dada por:

$$p = P(E) = \frac{h}{n}$$

Evidentemente la probabilidad de que no ocurra el suceso E será:

$$q = P(\text{no E}) = \frac{n-h}{n} = 1-p$$

La definición anterior de probabilidad tiene el inconveniente de que emplea las palabras "igualmente factibles, sinonimas de "igualmente probables", es decir, emplea en la definición el término que esta definiendo. Es preciso pues buscar una definición de probabilidad estadística que presente mayor rigor. De acuerd o con esto, la probabilidad estimada o



probabilidad empírica de un suceso se toma como la frecuencia relativa de aparición de ese suceso cuando el número de observaciones es muy grande. La probabilidad por si mismo es el límite de la frecuencia relativa cuando el número de observaciones crece indefinidamente.

Así podemos llegar al límite definiendo la probabilidad de ocurrencia de un suceso por medio de una función  $R(X) = f(x)$ . Se conoce a  $P(X)$  como una función de densidad de la probabilidad o brevemente como función de densidad.

#### 2.4. LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION

Se han estudiado diversas funciones que se han comprobado empíricamente que se ajustan a algunos modelos de distribuciones dados en la vida real.

Las más importantes son la binomial, la normal y la de Poisson, pero dado el carácter de recordatorio del presente capítulo sólo se va a hablar brevemente de la distribución normal.

La distribución normal o curva de Gauss viene dada por la ecuación:

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

La curva puede normalizarse haciendo la media igual a cero y la varianza igual a 1 con lo cual resulta:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

El área bajo dicha curva vale 1 y las áreas entre el extremo  $x = -\infty$  y una ordenada cualquiera viene tabulada en cualquier tratado de Estadística.

## 2.5. EL MUESTREO

El muestreo es el estudio de las relaciones existentes entre una población y muestras extraídas de la misma, es decir, permite conocer determinados parámetros de la población con un grado de fiabilidad determinado a partir del conocimiento de las correspondientes cantidades muestrales denominadas generalmente estadísticas.

Considerense ahora todas las posibles muestras de tamaño  $N$  que pueden extraerse de una población de tamaño  $N_p$ . Para cada muestra puede extraerse un estadístico, que variará de una muestra a otra. Con ellas puede observarse una distribución de este estadístico que se denominará distribución muestral del estadístico.

A la desviación típica de la distribución muestral de un estadístico se la conoce como error típico. Es de notar que si el tamaño de la muestra  $N$  es bastante grande ( $N > 30$ ) las distribuciones muestrales son normales o casi normales. Por esta razón se divide el estudio de la teoría de muestras en métodos para grandes muestras y métodos para pequeñas muestras.

En cualquier tratado de Estadística pueden obtenerse los errores típicos para todas las distribuciones muestrales.

## 2.6. CORRELACIONES

Muy a menudo se encuentran en la práctica que existe una relación entre dos o más variables.

Es muy práctico en la mayoría de las ocasiones el conocer una relación funcional que ligue estas dos variables. -

El problema reside en el hecho de que al realizar un trazado gráfico los puntos se sitúan de un modo discontinuo en forma de nube.

Se trata pues de hallar una relación funcional que si bien no va a ser exacta, va a ser la más aproximada, entendiéndose por más aproximada aquella en la que la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos a la curva representativa de la función sea mínima. A este tipo de ajuste se le denomina ajuste por mínimos cuadrados, y las distancias pueden medirse en la dirección del eje de las Y, (se hace mínima la expresión  $\sum(Y_i - Y_{ic})^2$ ); en la del eje de las X (se hace mínima la expresión  $\sum(X_i - X_{ic})^2$ ) o en el caso de una recta en la dirección perpendicular a la misma, se habla entonces respectivamente de correlación de Y sobre X; de X sobre Y o correlación ortogonal.

Una medida de la bondad de la estima puede ser su error típico, definido como la desviación típica de los valores estimados respecto al valor real, es decir:

$$S_{YX} = \sqrt{\frac{\sum(Y - Y_{est})^2}{N}}$$

El error típico sirve además para definir el parámetro más utilizado como medida de la bondad de la correlación, que es el coeficiente de correlación.

El coeficiente de correlación se define como la raíz cuadrada de la relación de la variación explicada a la variación total.

La variación total  $\sum(Y - \bar{Y})^2$  puede ponerse:  $\sum(Y - \bar{Y})^2 = \sum(Y - Y_{est})^2 + \sum(Y_{est} - \bar{Y})^2$ .

Al primer sumando que es totalmente aleatorio se le denomina variación no explicada y al segundo se le denomina variación explicada ya que por tratarse de las desviaciones de los valores de la función respecto a la Y media tiene un patrón definido.

Según esto:

$$r = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(Y_{est} - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}}$$

donde r varia de -1 a +1.

En cualquier manual de estadística se muestran una serie de formulas para el cálculo de r a partir de los datos.

## 2.7. RESUMEN

A lo largo del presente capítulo, no se ha pretendido dar un curso de Estadística, ya que ni ese es el objetivo del presente trabajo, ni el espacio que se le ha dado es el adecuado.

Se ha pretendido tan sólo dar una visión amplia y recordar los conceptos fundamentales que se han de manejar a cada momento a lo largo de la ejecución del trabajo.

### 3, LA GEOESTADISTICA COMO CIENCIA

#### 3.1. ORIGENES

Primitivamente la Geoestadística estaba definida como la aplicación práctica de la teoría de las variables regionalizadas al reconocimiento y a la estimación de los yacimientos mineros. El carácter general del formalismo teórico y numerosas aplicaciones extra-mineras en las que se ha empleado ha conducido a redefinir la Geoestadística como la Práctica de la Teoría de las Variables Regionalizadas.

Se denominan técnicas estadísticas a aquellas que precisan de una metodología que necesita del tratamiento de datos numéricos. En este campo se reconocen y citan tres escuelas.

La primera escuela o escuela norteamericana se apoya esencialmente sobre la Estadística clásica de variables independientes.

Esta Estadística clásica ha sido elaborada hace mucho tiempo y se utiliza con éxito en diferentes dominios extramíneros. Su principal defecto, que es reconocido por estos autores, es que se apoya sobre hipótesis muy restrictivas para - rendir cuenta de la complejidad de los fenómenos mineros - (multidimensionalidad, anisotropía, no estacionaridad, tendencias, correlaciones espaciales, etc). En resumen, se puede decir que la escuela norteamericana parece confusa en su punto de partida con la hipótesis de independencia espacial. Por - otra parte todos los resultados clásicos de la Estadística de variables independientes son casos particulares de la Geoestadística, siendo el ajuste polinomial por mínimos cuadrados o por el método de la máxima verosimilitud casos particulares - de la teoría del kriging universal.

La segunda escuela, o escuela surafricana nació del - estudio muy pragmático de los datos que presentan las minas - de oro surafricanas. De dicho estudio se dedujo que por una parte las muestras de oro presentan distribuciones logarítmico normales de sus leyes, y por otra que estas distribuciones son función de las dimensiones del soporte de la muestra.

Con estas consideraciones Krige y Sichel, definieron estimadores insesgados de la ley media de un panel a partir de las características media y varianza de los logaritmos de las leyes de las muestras.

Después, estudiando las regresiones entre las leyes - verdaderas de bloques ya explotados y las medias móviles de - las leyes de muestras disponibles a priori, Krige y Ueckermann definieron nuevos estimadores óptimos que ya no están ligados a la hipótesis restrictiva de la lognormalidad. Estos estimadores de Krige, que dieron nombre a la técnica del kriging - permiten resolver sin sesgos el problema de la estimación de reservas después de la selección.



Llegamos finalmente a la tercera escuela, última en fecha, que ha aprovechado los defectos de la escuela norteamericana y el trabajo anterior de la escuela surafricana. La razón por la cual esta escuela pudo ir más lejos que las otras dos se debe tal vez a, que su iniciador, G. Matheron es un matemático probabilista que aprovechó el enorme conocimiento experimental de la escuela surafricana. Su formación teórica le permitió formalizar en un lenguaje riguroso las observaciones experimentales de sus predecesores.

Para la escuela francesa, toda la Geoestadística se basa en la observación de que toda variable de un fenómeno mineralizado posee una función de autocorrelación espacial por compleja que sea. Las leyes en dos puntos  $X$  y  $X+h$  están autocorrelacionadas y esta autocorrelación depende del vector  $h$  (en módulo y dirección) que separa ambos puntos. La independencia sólo es un caso particular de autocorrelación y se trata en forma idéntica. Se caracteriza esta autocorrelación por un momento de segundo orden particularmente simple, llamado variograma, que es la herramienta fundamental de la Geoestadística. Todo el problema es poder estimar este variograma, a partir de informaciones disponibles. Para esto se necesita la hipótesis de estacionariedad, que se desarrollará más tarde.

Una vez en posesión de un estimador de esta función de autocorrelación, se le ajusta un modelo teórico particular, que será entonces característico de la mineralización estudiada. A partir de este modelo teórico, la Teoría de las Variables Regionalizadas formaliza y resuelve los diversos problemas tipos que hemos citado.

### 3.2. NOCION DE VARIABLE REGIONALIZADA Y ALEATORIA

Un fenómeno cuantificable se caracteriza por el desplazamiento en el espacio o en el tiempo de ciertas magnitudes que llamaremos Variables Regionalizadas.

Desde el punto de vista matemático, una Variable Regionalizada es una función  $y(x)$  del punto de coordenada  $x$ . La variación de esta función en el espacio es a menudo muy irregular y entonces es imposible estudiar directamente dicha función matemática. Sin embargo bajo este aspecto caótico se esconde una cierta estructura: a pesar de las fluctuaciones locales en casi todos los yacimientos existen zonas ricas y zonas pobres así como fenómenos de enriquecimiento y empobrecimiento paulatinos.

Una variable aleatoria es sin embargo una variable - que puede tomar una cierta cantidad de valores con una cierta ley de probabilidad, a cada uno de estos valores se le denomina realización particular de la variable aleatoria. El conjunto infinito de variables aleatorias se llama función aleatoria y contiene el mismo doble aspecto aleatorio y estructural de una variable regionalizada, es decir, localmente, es una variable aleatoria, pero en cuanto se consideran dos realizaciones de dicha variable aleatoria es ya una función aleatoria porque dichas dos variables están ligadas por correlaciones.

### 3.3. PRINCIPIO DE ESTACIONARIDAD

La Geoestadística no se interesa en los valores de la función aleatoria  $y(x)$  mismos, sino solamente en sus incrementos  $[y(x) - y(x+h)]$  y es la estacionaridad de estos incrementos lo que postula. Así, dos parejas de datos  $[y(x_i) - y(x_i+h)]$  e  $[y(x_j) - y(x_j+h)]$  separadas por el mismo vector  $h$  se consideran dos realizaciones diferentes del mismo incremento aleatorio -  $[y(x) - y(x+h)]$ .

Bajo esta hipótesis, los datos disponibles permiten la estimación del momento de segundo orden de los incrementos, que se denomina variograma.



### 3.4. EL VARIOGRAMA

Así pues, se define la función variograma que se representa por  $2\gamma(h)$  a la esperanza del cuadrado de los incrementos

$$2\gamma(h) = E \{ |Y(x+h) - Y(x)|^2 \}$$

O dicho de otro modo más gráfico, es el promedio de las discrepancias en dos puntos que distan  $h$ . El variograma, y los datos a partir de los cuales ha sido calculado esta definido sobre un cierto soporte, por ejemplo un trozo de testigo de sección y largo fijos. El cambio de soporte corresponde a un formalismo simple que permite deducir  $\gamma_p$  paneles a partir de  $\gamma_c$  testigos.

Para la construcción del variograma se efectúa un agrupamiento por clases de distancia: se consideraran sobre la línea las parejas  $(x_i, x_j)$  en número  $N(h)$  cuya distancia  $\overline{x_i x_j}$  cae en la clase  $(h - d/2, h + d/2)$  y se calcula  $\gamma(h)$  mediante la fórmula de su definición, es decir

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} |Y(x_i + k_a) - Y(x_i)|^2$$

para  $h = ka$ .

se obtendrá de esta manera un valor de  $\gamma$  para cada valor de  $h$  que se llevarán sobre unos ejes coordenados.

En el caso de que el variograma no sea lineal, existen asimismo fórmulas empíricas que son básicamente la misma sólo que sustituyendo en la expresión el escalar  $h$  por un vector  $\vec{h}$  que vendrá definido por tantas componentes como dimensiones tenga el espacio de que se trate.

Dado que el variograma presenta un perfil en dientes de sierra, lo que se hace es ajustarlo a un modelo teórico de ecuación conocida. En cualquier tratado de Geoestadística se presentan la forma, ecuación y propiedades de dichos modelos.

### 3.5. LA VARIANZA EN GEOESTADISTICA

La varianza tiene en Geoestadística un papel fundamental. Se va a hacer una distinción entre varianza de extensión y varianza de estimación.

Consideremos una función aleatoria  $Y(x)$  y designemos por  $Z(v)$  y  $Z(v')$  las leyes medias de dos dominios  $V$  y  $V'$ , es decir, las integrales

$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_V Y(x) dx \quad \text{y} \quad Z(v') = \frac{1}{v'} \int_{V'} Y(x) dx$$

Supongamos que se quiera comparar el valor medio  $Z(v)$  con el valor medio  $Z(v')$ . Podemos suponer también  $Z(v)$  conocido y  $Z(v')$  desconocido. La práctica más usual consistirá en estimar el valor  $Z(v')$  por el valor  $Z(v)$ , es decir, se extiende el valor del volumen  $v$  al volumen  $v'$ , pero es evidente que al hacer esta operación, se comete un error que no es otro que la diferencia  $Z(v) - Z(v')$ .

En la práctica, este error será desconocido, pero se puede caracterizar estadísticamente. Debido a la interpretación probabilística de la realidad, el error.

$$\epsilon = Z(v) - Z(v')$$

es una variable aleatoria que se puede caracterizar por su media y su varianza, pero la media es cero ya que:

$$E(\epsilon) = E |Z(v) - Z(v')| = 0$$

ya que la probabilidad de que ocurra  $Z(v)$  es la misma que la de que ocurra  $Z(v')$ .

En cuanto a la varianza de este error será:

$$\sigma_E^2 = E\{|Z(v) - Z(v')|^2\} = E\{|Z(v)|^2 + |Z(v')|^2 + 2|Z(v) \cdot Z(v')|\}$$

a esta varianza se la denomina varianza de extensión y es la varianza del error que se comete al atribuir a  $v'$  la ley media de  $v$ .

Muy a menudo en la práctica, se conocen los valores - tomados por  $Y(x)$  en  $N$  puntos ( $N$  sondeos) entonces se estima - el valor promedio por la media aritmética de las  $N$  muestras.

$$Y^*(v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(x_i)$$

cuando sin embargo la ley media verdadera es:

$$Y(v) = \frac{1}{v} \int_v Y(x) dx$$

Evidentemente estamos cometiendo un error cuyo valor es:

$$\varepsilon = \frac{1}{v} \int_v Y(x) dx - Y^*(v)$$

a la varianza de este error se la denomina varianza de estima ción.

Aplicando estos principios básicos se ha de llegar en cada caso a la solución de problemas de índole muy variado - tales como la determinación de recursos, de leyes, de poten-- cias, etc, a partir de sólo unos pocos datos, y ello con un grado de fiabilidad conocida.

#### 4. LA GEOESTADISTICA EN LA INVESTIGACION MINERA

Si bien la Geoestadística nació en un principio por y para la investigación minera, su posterior desarrollo, debido sobre todo al auge de la Informática ha hecho que sus métodos sean aplicables a numerosos campos extramineros como hidrogeología, reconocimiento forestal, ecología, etc.

No obstante, en nuestro caso vamos a tratar de describir algunos de sus métodos y aplicaciones en el campo de la investigación minera.

##### 4.1. APLICACION DE LA GEOESTADISTICA EN INVESTIGACION MINERA

Ya se ha dicho que la Geoestadística tiene su campo de aplicación en la investigación minera, su desarrollo se basa por tanto en la exposición de las diferentes etapas de una investigación y los problemas que hay que resolver en cada -

una de estas. La resolución de estos problemas supone una metodología de trabajo que se sintetizará en este trabajo sin pretender llegar al fondo del tema.

No constituye este proyecto ni siquiera un índice completo, sino una breve y ligera pasada cuyo único fin es despertar el interés y abrir este nuevo camino para trabajos futuros.

#### 4.1.1. ETAPAS DE UNA INVESTIGACION MINERA

La base de todo trabajo de investigación minera en cualquiera de sus fases es el estudio geológico. Los elementos cuantitativos reunidos en este estudio establecen la posibilidad de continuar con la investigación a base de un reconocimiento minero a gran escala cuyos resultados si son prometedores dan paso a una tercera etapa tendente a definir técnicas de explotación mediante el análisis de los parámetros buscados y por último el estudio económico y programación de la explotación.

En la primera etapa, reconocimiento geológico, a partir de indicios geológicos (afloramientos, anomalías geofísicas o geoquímicas, etc), se selecciona una zona supuestamente favorable, se levanta un mapa geológico lo más detallado posible y se trata de probar la existencia de mineralización y sus límites mediante labores mineras, sondeos, etc.

En esta etapa ya tiene su aplicación la Geoestadística en cuanto al tratamiento de la información obtenida, ya que la selección de un área supuestamente favorable se realiza mediante la aplicación de un modelo geométrico, conceptual o subjetivo, es decir, se predice la posibilidad de existencia de un yacimiento en razón de la forma, tamaño y distribución de depósitos conocidos (modelo geométrico). La información obtenida de una campaña sistemática de muestreo se reduce a asociaciones de variables que definen o hacen intuir un

proceso geológico determinado íntimamente unido a otro metalogénico (modelo conceptual) o bien la selección y debida ponderación de observaciones individuales de conocedores de la zona conducen a demarcaciones de zonas supuestas de interés (modelo subjetivo).

En la segunda etapa reconocimiento sistemático a gran escala, se pretende con la imposición más o menos regular de una malla de puntos de información, localizar con más precisión la masa mineralizada y estimar su cubicación y su ley media en una primera fase que si es prometedora dará paso a una segunda fase dentro de esta etapa que consiste en el cierre de la malla obteniendo datos para estimar superficie o volumen, cálculo de contenido medio y cuantificación del error probable o fiabilidad de los resultados.

En la tercera etapa, considerado ya el yacimiento explotable, trata del proyecto de investigación de definir las técnicas de explotación, es decir, ritmo de explotación, vida de la misma, método, nivel de selección, ley de corte, etc. - Para ello se establece una malla más fina que permitirá estimar cada unidad (bloque), unificando en grupos de semejantes características que conllevaran el mismo método de explotación, para lo que define estimadores locales calculando su precisión, diferenciando recursos "in situ", y reservas explotables, precisión de la selectividad del método de explotación y la disposición óptima de los sondeos para estimar leyes locales.

Por último, una cuarta etapa es la programación de la explotación, es decir, producción máxima y mínima por unidad de tiempo, la regularización de la calidad y la necesidad de una regulación de salida (almacen de stocks).

Los conocimientos básicos de Geoestadística necesarios para la resolución de los problemas presentados en esta exposición de las etapas de una investigación, han sido los presentados en los capítulos 2 y 3, presentación que se ha hecho desde el punto de vista práctico de aplicación, sin demos

traciones, a manera de recordatorio o consulta de formulas, definiciones, conceptos y elementos particulares de las leyes de probabilidad aplicables a este campo.

## 5, UTILIZACION DE LA GEOESTADISTICA

Se han repasado hasta este momento los principios teóricos y las definiciones a emplear, que son el utillaje necesario para la resolución de los problemas geoestadísticos que se le presentan al investigador. Se pretende en el presente capítulo hacer la exposición concreta de estos problemas.

### 5.1. VARIANZA DE LA LEY DE BLOQUES

Por muy pequeña que sea una veta mineralizada, será preciso extraer un bloque de roca de cierto tamaño durante su explotación. El tamaño mínimo de este bloque viene determinado por el método de explotación, que a su vez viene condicionado por las características del yacimiento y de la roca encajante. Todo ello, hace carente de interés la determinación de la ley de un bloque de tamaño inferior al mínimo de explotación.



Por otra parte, cuanto mayor es el tamaño de los bloques considerados, menor es el grado de fluctuación de leyes, esto es, menor es su varianza. Esta idea es fundamental, en tanto en cuanto nos lleva a definir el teorema de Krige o de aditividad de las varianzas.

Dicho teorema, formulado inicialmente en forma experimental en los yacimientos de oro de Sudafrica, establece que la varianza de una muestra en un yacimiento es igual que la suma de la varianza de la muestra en un bloque y la del bloque en el yacimiento:

$$\sigma^2_{(M/Y)} = \sigma^2_{(M/B)} + \sigma^2_{(B/Y)}$$

La importancia de esta relación es fundamental ya que permite conocer la varianza de bloques de un tamaño dado en el yacimiento ya que la varianza de las muestras en el yacimiento  $\sigma^2_{(M/Y)}$  puede calcularse mediante el variograma.

La varianza de una muestra en un bloque puede representarse por una función  $F(v)$  del volumen considerado, y su expresión en función del variograma es:

$$\sigma^2_{(M/v)} = F(v) = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy$$

Por lo tanto la varianza de un bloque  $v$  en un bloque mayor  $v'$  puede obtenerse:

$$\sigma^2_{(v/v')} = \sigma^2_{(M/v')} - \sigma^2_{(M/v)} = F(v') - F(v)$$

Dado que aparecen generalmente integrales de difícil resolución para este problema existen ábacos ajustados a distintos tipos de modelos que simplifican el cálculo.

En cualquier tratado de Geoestadística se encuentran dichos ábacos y su fundamento teórico.

## 5.2. CALCULO DE VARIANZAS

Ya se han definido en el capítulo 3° los conceptos de varianza de extensión y varianza de estimación. Como ha podido apreciarse, constituyen dos facetas distintas de un mismo concepto general. Ambos tipos de varianza corresponden a la noción de error cuadrático medio y sirven para caracterizar la precisión de un valor estimado, referido en el primer caso a la extensión de una muestra en su zona de influencia, y en el segundo a un problema de estimación más general.

### 5.2.1. PRINCIPIO DE COMPOSICION DE VARIANZAS

Este principio indica que todas las estimaciones mineras pueden separarse en extensiones sucesivas. La hipótesis básica para ello consiste en considerar que los errores asociados a estas sucesivas extensiones pueden suponerse independientes entre sí, y, por lo tanto, las respectivas varianzas pueden sumarse simplemente para dar la varianza de estimación total.

Aunque esto no es rigurosamente cierto, el principio es perfectamente válido en la práctica, máxime cuando de entrada, los parámetros mismos del variograma comportan ya cierta incertidumbre.

Aplicando este principio podemos determinar la ley de una porción de un yacimiento (o del yacimiento entero) y su grado de precisión mediante sucesivas extensiones (de muestras a zonas de influencia, estimación de una sección por composición de las zonas de influencia, extensión de la sección al bloque correspondiente, etc).

A fin de soslayar el cálculo de las integrales implicadas en el cálculo de las varianzas, se han desarrollado diversos ábacos que proporcionan las varianzas de extensión para los casos más comunes y los modelos de variograma más utilizados. Por otra parte, el desarrollo analítico de las inte-



grales proporciona en algunos casos fórmulas aproximadas de gran simplicidad.

### 5.3. MEDIAS MOVILES

La práctica minera demuestra que los bloques supuestamente ricos no lo son tanto en la realidad, y que los bloques pobres son también generalmente menos pobres de lo que se había estimado. Este hecho se debe a que en el entorno de muestras o sondeos con elevada ley existen zonas que no son tan buenas, y viceversa, y se traduce habitualmente en una recuperación inferior a la prevista.

A fin de paliar estas consecuencias, además de la buena práctica del minero con experiencia y del dudoso empleo de factores de dilución hay que considerar seriamente métodos que permitan una mejor estimación. Todos los métodos utilizados en este sentido se basan en mayor o menor grado, en la noción de la zona de influencia y persiguen el establecimiento de una media compuesta o ponderada en función de los valores próximos, con unos parámetros de ponderación que sirvan también para la estimación de más bloques cuando las características geométricas lo permitan.

Los métodos más utilizados son los siguientes:

#### 5.3.1. PONDERACION INVERSA O CUADRATICA INVERSA A LA DISTANCIA

Son los métodos más sencillos, y se basan en la suposición de que el grado de influencia de las muestras próximas disminuye lineal o cuadráticamente en función de su distancia al punto o bloque a estimar. Las muestras situadas a una misma distancia tienen el mismo parámetro de ponderación. La validez del método puede contrastarse en un yacimiento con zonas ya explotadas o en un yacimiento virgen si se conoce el variograma.

El método no proporciona, en si mismo, ninguna indicación sobre la magnitud del error asociado.

### 5.3.2. PONDERACION MEDIANTE TECNICAS DE REGRESION

La media ponderada a utilizar viene definida por una fórmula del tipo:

$$Y = b_0 + \sum_i b_i Y_i + \epsilon$$

Donde los coeficientes  $b$  se calculan para la configuración geométrica deseada, mediante regresión de los valores conocidos de zonas ya explotadas del yacimiento. Esto obliga a la eventual corrección de los coeficientes al seguir avanzando la explotación.

Puede mejorarse aún la ecuación expresando el coeficiente  $b_0$  en función de la media muestral total, con lo que se considgue hacer la regresión independientemente de cualquier tendencia que pueda existir en los datos:

$$\hat{Y} = b'_0 \bar{Y} + \sum_i b_i Y_i$$

### 5.3.3. KRIGEAGE

Consiste también en una ponderación lineal a la que se impone como condiciones que la suma de pesos relativos sea igual a la unidad (condición de insesgado) y que la varianza de la estimación sea mínima.

Supongamos que se pretende estimar la ley  $Z$  de un panel, y la información disponible está constituida por diversos trozos de testigo de los alrededores, de leyes  $Z_i$ .

El krigeage suministrará un estimador  $Z^*$  combinación lineal de todas las informaciones posibles:

$$Z^* = \sum_i \lambda_i Z_i$$

En este estimador se tendrá en cuenta que es inseguro ( $\sum_i \lambda_i = 1$ ) y se consideran las condiciones de simetría que hará que diversos  $\lambda_i$  sean iguales o dará relaciones de magnitud entre ellos haciendo mayores los más próximos al panel en cuestión.

En cualquier tratado de Geoestadística se presenta el desarrollo matemático de la expresión que resulta, y que no se reproduce aquí por salir fuera del ámbito de este trabajo.

## 6, CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo se ha pretendido, no escribir un tratado profundo de Geoestadística, sino, más bien, hacer un recordatorio de métodos y una serie de posibles utilizaciones en el campo de la investigación minera.

Como conclusiones generales se puede decir que la estrategia de la Geoestadística se basa en modelos de las distintas ramas de la Estadística y la Investigación Operativa, y que la prospección progresa de una forma secuencial desde las grandes escalas a las más pequeñas.

La información geológica es la que debe presidir todo trabajo de investigación minera en cualquiera de sus sucesivas fases como base de aplicación de los conceptos de ambiente metalogenético que sirvan para significar áreas favorables a la constitución o simplemente a la presencia de depósitos minerales.

Ello marca ya un camino a seguir en la investigación minera, la creación de modelos. En este método ya aplicado - hace tiempo en muchos campos, el investigador se sirve de modelos descriptivos ya sean físicos o geométricos y una vez seleccionada el área favorable en base a este modelo realiza otro de predicción que mediante el tratamiento de la información, proceso y análisis de resultados va renovando y modificando hasta llegar a unas conclusiones finales sobre evaluación en caso positivo o abandono en el contrario.

Los métodos empleados se deducen de los datos de partida y el objetivo marcado. El tratamiento de la información es siempre el mismo: el tratamiento probabilístico.

Puede decirse que el tratamiento probabilístico de la investigación minera se inició el año 1957 con los trabajos de Allais representando según Griffiths una ruptura fundamental, pudiendo considerarse el desarrollo subsiguiente como el comienzo de una nueva filosofía operacional en la busqueda de recursos no renovables.

El desarrollo del tratamiento probabilístico ha sido en estos últimos 25 años espectacular, debido sobre todo al desarrollo del tratamiento automático de datos que ha actuado asimismo sobre nuevas técnicas en la Investigación Operativa.

Hoy no se concibe una explotación moderna y racionalmente llevada que no aplique métodos geostatísticos al control de su explotación definiendo unos paneles de los cuales estima sus leyes y volúmenes por estos métodos pudiéndose de este modo realizar una perfecta planificación de la explotación.



